

# Vježbe 6

## Telekomunikacione mreže

# Primjer 1

U pošti postoje dva telefona. Kada osoba A odluči da koristi telefon i dođe u poštu utvrdi da jedan telefon već koristi osoba B, pri čemu niko više ne čeka. Pretpostavimo da vrijeme korišćenja telefona ima eksponencijalnu raspodjelu parametra  $\mu$ . Koliko iznosi vjerovatnoća da osoba A završi korišćenje telefona prije osobe B? Što ako je vrijeme korišćenja računara determinističko?

# Primjer 1

- $X$  – vrijeme trajanja korišćenja telefona od strane osobe A
- $Y$  – vrijeme trajanja korišćenja telefona od strane osobe B

$$\begin{aligned} P(X < Y) &= \int_0^{\infty} P(X < y | Y = y) f_Y(y) dy = \int_0^{\infty} F_X(y) f_Y(y) dy = \\ &= \int_0^{\infty} (1 - e^{-\mu y}) \mu e^{-\mu y} dy = 1 - \mu \int_0^{\infty} e^{-2\mu y} dy = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Za slučaj determinističke raspodjele

$$P(X < Y) = 0$$

## Primjer 2

Pretpostavimo da se studenti A i B takmiče ko će prije završiti zadatak. Pretpostavimo da vremena završetka imaju eksponencijalnu raspodjelu parametara  $\lambda_A$ , odnosno  $\lambda_B$ . Odrediti raspodjelu slučajne promjenljive Z koja predstavlja broj takmičenja do prve pobjede studenta A. Neka je p vjerovatnoća da student A pobjeđuje Studenta B. Neka je X slučajna raspodjela vremena rada studenta A na zadatku, a Y slučajna raspodjela vremena rada studenta B na zadatku.

## Primjer 2

$$\begin{aligned} p &= P(X < Y) = \int_0^{\infty} P(X < y | Y = y) f_Y(y) dy = \int_0^{\infty} F_X(y) f_Y(y) dy = \\ &= \int_0^{\infty} (1 - e^{-\lambda_A y}) \lambda_B e^{-\lambda_B y} dy = 1 - \lambda_B \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_A + \lambda_B)y} dy = 1 - \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} = \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} \end{aligned}$$

Neka je  $q$  vjerovatnoća pobjede studenta B

$$q = 1 - p = \frac{\lambda_B}{\lambda_B + \lambda_A}$$

$$P(Z = n) = (1 - q)q^{n-1} = \frac{\lambda_A}{\lambda_B + \lambda_A} \left( \frac{\lambda_B}{\lambda_B + \lambda_A} \right)^{n-1}, \quad 0 < q < 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Radi se modifikovanoj geometrijskoj raspodjeli parametra  $\frac{\lambda_B}{\lambda_B + \lambda_A}$

# Primjer 3

Neka se dolazni saobraćaj karakteriše Pareto raspodjelom. U Pareto raspodjeli  $a$  je parametar oblika koji je pozitivan realan broj, dok je  $b$  minimalna vrijednost slučajne promjenljive.

Za vrijednosti  $a=1.4, 1.5, 1.6$ , i  $b=2$ , odrediti srednju vrijednost slučajne promjenljive?

Kako utiču parametri raspodjele na srednju vrijednost?

Odrediti Laplasovu transformaciju Pareto raspodjele.

# Primjer 3

$$f_x(x) = \frac{\alpha b^\alpha}{x^{\alpha+1}}, \quad x \geq b$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_b^\infty x f_x(x) dx = \\ &= \int_b^\infty x \frac{\alpha b^\alpha}{x^{\alpha+1}} dx = \alpha b^\alpha \int_b^\infty x^{-\alpha} dx = \\ &= \frac{\alpha b}{\alpha - 1} \end{aligned}$$

# Primjer 4

$$E(X) = \frac{\alpha b}{\alpha - 1}$$

$$\alpha = 1.4, \quad b=2, \quad E(X) = \frac{1.4 * 2}{0.4} = 7$$

$$\alpha = 1.5, \quad b=2, \quad E(X) = \frac{1.5 * 2}{0.5} = 6$$

$$\alpha = 1.6, \quad b=2, \quad E(X) = \frac{1.6 * 2}{0.6} = 5.33$$



# Primjer 4

$$f(x) = \frac{\alpha b^\alpha}{x^{\alpha+1}}, \quad b \leq x < \infty$$

$$X(s) = \int_b^\infty \frac{\alpha b^\alpha}{x^{\alpha+1}} e^{-sx} dx = \alpha b^\alpha \int_b^\infty \frac{e^{-sx}}{x^{\alpha+1}} dx$$

$$X(s) = \alpha b^\alpha s^\alpha \Gamma(-\alpha, sb), \quad \text{gdje je } \Gamma(-\alpha, sb) = \int_{sb}^\infty \frac{e^{-t}}{t^{\alpha+1}} dt$$

# Primjer 5

Pomoću Z transformacije odrediti srednju vrijednost i varijansu slučajne promjenljive sa geometrijskom raspodjelom

$$X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k \text{Prob}\{X = k\} = \sum_{k=0}^{+\infty} (1-q)(zq)^k = \frac{1-q}{1-zq}$$

$$E[X] = X'(1) = \left. \frac{d}{dz} \frac{1-q}{1-zq} \right|_{z=1} = \left. \frac{q(1-q)}{(1-zq)^2} \right|_{z=1} = \frac{q}{1-q}$$

$$\begin{aligned} E[X^2] &= X'(1) + X''(1) = \frac{q}{1-q} + \left. \frac{d}{dz} \frac{q(1-q)}{(1-zq)^2} \right|_{z=1} = \\ &= \frac{q}{1-q} + \left. \frac{2q^2(1-q)}{(1-zq)^3} \right|_{z=1} = \frac{q}{1-q} + \frac{2q^2}{(1-q)^2} = \frac{q(1+q)}{(1-q)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{k=1}^{+\infty} z^k \text{Prob}\{X = k\} = \sum_{k=1}^{+\infty} z^k (1-q)q^{k-1} = \\ &= z(1-q) \sum_{k=1}^{+\infty} (zq)^{k-1} = \frac{z(1-q)}{1-zq} \end{aligned}$$

Modifikovana  
geometrijska

# Primjer 5

Odrediti raspodjelu sume slučajnih promjenljivih koje imaju identičnu geometrijsku raspodjelu. Broj slučajnih promjenljivih takođe ima geometrijsku raspodjelu.

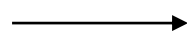
$$X(z) = \frac{z(1-q)}{1-zq}$$

$$N(z) = \frac{z(1-p)}{1-zp}$$

$$Y(z) = \sum_j \left[ \prod_{i=1}^j X_i(z) \right] \text{Prob}\{N = j\}$$

$$Y(z) = \sum_j [X(z)]^j \text{Prob}\{N = j\} = N[X(z)]$$

$$Y = \sum_{i=1}^N X_i$$



$$\begin{aligned} Y(z) = N[X(z)] &= \frac{\frac{z(1-q)}{1-zq}(1-p)}{1 - \frac{z(1-q)}{1-zq}p} = \frac{z(1-q)(1-p)}{1 - z[q + p - pq]} = \\ &= \frac{z(1-q)(1-p)}{1 - z[1 - (1-q)(1-p)]} \end{aligned}$$

modifikovana geometrijska  
raspodjela parametra  
(1-q)(1-p)